ශේෂ ප්‍රමේය සාධක

(1) i) X හි බහුපදයක් වන P (x) යන්න (x − a) යන්නෙන් බෙදූ විට R ශේෂයක් ලැබෙයි. R = P (a) බව පෙන්වන්න. $a \neq b$ නම් (x − a) (x − b) යන්නෙන් P (x) බෙදූ විට $\frac{P(a)}{a-b}(x-b) - \frac{P(b)}{a-b}(x-a)$ ශේෂයක් ලැබෙන බව, ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ පෙන්වන්න.

ii) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ යන්නෙහි a, b, c රාශිවලින් පළමු වැනි මාත්‍රයේ වූ සාධක හතර සොයන්න. (1978)

(2) i) බහුපද පිළිබඳ ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න. q යනු නිශ්ශූන්‍ය (ශූන්‍ය නොවන) නිඛිලයක් වන අතර $f(x) \equiv 2x^3 + 3x^2 - 3x + q$ වෙයි. x − q යන්න f(x) හි සාධකයක් නම් q හි අගය සොයන්න. q ට මෙම අගය ඇති විට f(x) යන්න ඒකජ සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. $f(x) \equiv (x-a)(2x-1)(x+2)+bx+c$ වන පරිදි a, b, c නියත සොයන්න.

ii) n යනු ධන නිඛිලයක් ද $f_1(n) \equiv x^{2n}-1$ ද $f_2(n) \equiv x^{2n-1}-1$ ද වෙයි. $f_1(n+1) - f_1(n)$ හා $f_2(n+1) - f_2(n)$ දෙකම $x^2 - 1$ න් හරියටම බෙදෙන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $f_1(1)$යන්න $x^2 - 1$ න් ද $f_2(1)$ යන්න $x - 1$ න් ද හරියටම බෙදෙන බව අභ්‍යහනයෙන් ඔප්පු කරන්න. $f_2(n)$ යන්න $x + 1$ න් නොබෙදෙන බව ද පෙන්වන්න. (1980)

(3) i) $0 < P < 1$ නම් x හි තාත්වික අගයන් සඳහා $\frac{x-p}{x^2-2x+p}$ ශ්‍රිතයට සියලු තාත්වික අගයන් ගත හැකි බව පෙන්වන්න. $P = \frac{3}{4}$ වන විට ප්‍රස්තාරයක් ඇසුරෙන් ඔබේ පිළිතුරු පැහැදිලි කරන්න.

ii) $x^2 + 1$ න් හරියටම බෙදෙන එහෙත් $(x-1)^2(x+1)$ න් බෙදූ විට $-10x + 6$ ශේෂයක් ඉතිරි වන x හි සිව්වන මාත්‍රයේ බහුපදයක් සොයන්න. (1983)

(4) i) $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 \equiv 3(b-c)(c-a)(a-b)$ බව පෙන්වන්න. x, y සහ z යනු $a \neq b \neq c \neq$ වෙන තාත්වික a, b, c සඳහා $x + y + z = 0$, $ax + by + cz = 0$ සහ $x^3 + y^3 + z^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$ වන පරිදි වූ තාත්වික විචල්‍ය නම්, $\frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b} = 1$ බව පෙන්වන්න.

ii) $f(x) \equiv px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ වේ. $x^2 + a$ මඟින් f(x) බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $(s - qa)x + a^2 - ra + t$ බව පෙන්වන්න. α සහ α යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම් $ps^2 - qrs + q^2t = 0$ සම්බන්ධය p, q,r,s,t මඟින් සපුරාලන බව සාධනය කරන්න. (1984)

(5) i) $f(x, y, z) \equiv (x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ යයි ගනිමු. (x+y), (y + z), (z + x) යනු f (x, y, z) හි සාධක බව පෙන්වන්න. ඒනයින් $(x + y + z) - x^5 - y^5 - z^5$ සාධක වලට වෙන් කරන්න.

ii) $(x^2 + px + 1)$ යනු $ax^5 + bx^2 + c$ හි සාධකයක් නම්, එවිට $(a^2 - c^2)(a^2 - c^2 + bc) = a^2b^2$ බව සාධනය කරන්න. මෙම අවශ්‍යතාව සපුරාලයි නම් එවිට, $(x^2 + px + 1)$ යන්න $cx^5 + bx^3 + a$ හි සාධකයක් ද බව පෙන්වන්න. (1985)

(6) $f(x, y, z) \equiv x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ යයි ගනිමු. (x − y) (y − z) සහ (z − x) යනු f (x, y, z) සාධක බව පෙන්වන්න. ඒනයින් $x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ සාධකවලට වෙන් කරන්න. (1986)

(7) i) $f(x) = 2x^4 + (3k - 4)x^3 + (2k^2 - 5k - 5)x^2 (2k^3 - 2k^2 - 3k - 6)x + 6$ හි $x^2 - k$ සාධකයක් වන පරිදි k හි අගයන් සොයන්න. k හි එක් එක් අගයට අනුරූප f(x) හි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \frac{1}{2}\{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\}$ බව පෙන්වන්න. $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$ නම් $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ බව අපෝහනය කරන්න. (1989)

(8) a) $f(x) = x^4 - bx^3 - 11x^2 + 4(b+1)x + a$, මෙහි a සහ b නියත වේ.

i) f(x), වර්ග ප්‍රකාශනයක පරිපූර්ණ වර්ගයක් බව ද

ii) $x + 2$ යනු f(x) හි සාධකයක් බව ද දී ඇත. a සහ b සොයා f(x) හි සාධක සියල්ල සොයන්න.

b) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ හි සාධක සොයන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$(a+b+c)^3 - (b+c+a)^3(c+a-b)^3 - (a+b-c)^3 = 24abc$ බව සාධනය කරන්න. (1990)

(9) i) $f(x, y, z) \equiv x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$ හි සාධකයක් $(x-y)$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින් ප්‍රකාශනය පූර්ණ ලෙස සාධකවලට බිඳින්න. x, y, z වූ කලී ඒවායෙන් ඕනෑම දෙකක් එකිනෙකට සමාන නොවන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම් $f(x, y, z)$ ශූන්‍ය විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $ax^3 + bx + c$ ප්‍රකාශනයට $x^2 + px + 1$ ආකාරයේ සාධකයක් ඇත්නම් $a^2 - c^2 = ab$ බව පෙන්වන්න. මෙම අවස්ථාවෙහි දී $ax^3 + bx + c$ සහ $cx^3 + bx^2 + a$ ප්‍රකාශනවලට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න. (1991)

(10) a) a, b, c සියල්ල ප්‍රභින්න යැයි උපකල්පනය කරමින් $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ප්‍රකාශන $k + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි K, A, B, C යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. $a = b \neq c$ අවස්ථාව සාකාච්ඡා කරන්න. a, b, c, d සියල්ල ප්‍රභින්න විට $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) ඒකජ සාධක දෙකක් ලබා ගැනීමෙන් $(a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4$ ප්‍රකාශනයේ සාධක සොයන්න. (1993)

(11) $(b+c)^3(b-c) + (c+a)^3(c-a) + (a+b)^3(a-b)$ සාධක සොයන්න. (1996)

(12) අ) $f(a, b, c) \equiv (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ හි සාධක සොයන්න. $f(a, b, c)$ යන්න $(a+b+c)^{1997} - a^{1997} - b^{1997} - c^{1997}$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න.

ආ) "විසංවාදයක් මඟින් සාධනය" ක්‍රමය යොදා $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ යන්නට $x + n$ ආකාරයේ සාධකයක් නොතිබෙන බව පෙන්වන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි. (1997)

(13) අ) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයන්න. ප්‍රභින්න p, q, r සඳහා $x^3 + y^3 + z^3 = 3(p-q)\ (q-r)(r-p)$ සහ $px + qy + rz = 0$ ද $x + y + z = 0$ නම්, $x = q - r$, $y = r - p$ සහ $z = p - q$ බව පෙන්වන්න.

ආ) n (> 1) යනු දී ඇති නිඛිලයක් ද $t > 0$ ද ලෙස ගනිමු. t විචලනය වන විට $(n+1)t + \frac{n-1}{t}$ හි අඩුතම අගය වන l සොයන්න. $k > l$ විට $(n+1)t + \frac{n-1}{t} = k$ සමීකරණයෙහි මූල දෙක ම ධන බව පෙන්වන්න. $(n+1)t + \frac{n-1}{t} = \sqrt{8n(n+1)}$ හි වඩා විශාල මූලය n ඇසුරෙන් සොයන්න. (1998)

(14) අ) $x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ හි සාධක සොයන්න.

ආ) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ සහ $g(x) = 6x^2 - 16x + 19$ යැයි ගනිමු. $f(x) + \lambda g(x)$ ශ්‍රිතය $a(x+b)^2$ ආකාරයට වනසේ වූ λ හි අගයන් සොයන්න. මෙහි a සහ b තාත්ත්වික නියත වේ. ඒ නයින්, A, B, C හි අගයයන් දෙමින් $A(x-3)^2 + B(x+c)^2$ ආකාරයට f(x) ප්‍රකාශ කරන්න.

$g(x) = 10A(x-3)^2 + 5B(x+c)^2$ බව ද පෙන්වන්න. තව ද $\frac{f(x)}{g(x)}$ හි කුඩාතම සහ වැඩිතම අගයයන් ද සොයන්න. (1999)

(15) P(x) වර්ගජ බහුපදයක් පිළිවෙලින් $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යන්නෙන් බෙදූ විට ශේෂයන් $1, \frac{1}{2}$ හා $\frac{1}{3}$ වේ. $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යනු $Q(x) = xp(x) - 1$ මගින් දෙනු ලබන Q(x) බහුපදයේ සාධක බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් Q(x) සොයන්න.(2004)

(16) $P(x) = ax^3 + bx + c$ යන්න $x+1$න්, $x-1$න් හා $x-2$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ පිළිවෙලින් 4, 0 හා 4 වේ. a, b, c හි අගයන් සොයා P(x) හි ඒකජ සාධක සියල්ල නිර්ණය කරන්න. (2005)

(17) f(x) බහුපදය $(x - \alpha)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න. f(x) බහුපදය $(x-\alpha)(x-\beta)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $Ax + B$ ආකාරය ගනී. මෙහි $\alpha \neq \beta$ වේ. α, β $f(\alpha)$ සහ $f(\beta)$ ඇසුරෙන් A හා Bනියත ප්‍රකාශ කරන්න. ඒනයින්, $x^3 + kx^2 + k$ යන්න $(x-1)(x+2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න. (2008)

(18) f(x) බහුපදය $x - \alpha$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න. f(x) බහුපදය $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $A(x-\beta)(x-\gamma) + B(x-\alpha)(x-\gamma) + C(x-\alpha)(x-\beta)$ ආකාරය ගනී. මෙහි α, β සහ γ සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. α, β, γ, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ සහ $f(\gamma)$ඇසුරෙන් A, B, C නියත ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් $x^5 - kx$ යන්න $(x+1)(x-1)$ $(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x හි පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න. (2009)

(19) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ යන්න f(x) හි සාධකයක් වේ නම් හා f(x) යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය -6 නම් a හා b වල අගයන් සොයන්න. f(x) හි අනෙක් ඒකජ සාධක දෙකත් සොයන්න.(2013)

(20) $a, b, c \in \mathbb{R}$ සහ $ac \neq 0$ යැයි ගනිමු. ශූන්‍ය $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ද $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda+1)^2 = b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.

$p, q, r \in \mathbb{R}$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයෙහි මූල γ හා δ යැයි ද, $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ යැයි ද ගනිමු. $\lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \frac{1}{\mu}$ වන්නේ $acq^2 = prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$kx^2 - 3x + 2 = 0$ හා $8x^2 + 6kx + 1 = 0$ සමීකරණවල මූල එකම අනුපාතයට වන බව දී ඇත. මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයන්න. (2014)